PARTIE I

PRELIMINAIRE

Soient O, A, B trois points alignés distincts d'un plan affine euclidien ; on suppose que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont de même sens. On note I le milieu de [AB] , (C) le cercle de diamètre [AB] , (C') le cercle de diamètre [OI] et T un point commun à (C) et (C').

Montrer que $OT^2 = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$.

Soit (P) un plan affine euclidien et (H) une hyperbole de centre O ayant pour asymptotes les droites Δ_1 et Δ_2 de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Le plan (P) est rapporté au repère affine $\mathcal{R} = (O, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

1) Quelle est l'équation cartésienne de (H) dans le repère $\mathcal{R}$?

2) Soit $A = (a, 0) \in \Delta_1$ et $B = (0, b) \in \Delta_2$.

a) Donner une équation cartésienne de la droite (AB).

b) Lorsque (AB) rencontre (H) en deux points M_1 et M_2, montrer que [AB] et $[M_1M_2]$ ont le même milieu.

c) Enoncer et justifier une réciproque.

3) Application : soit $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé direct de (P) avec pour unité $\left\|\vec{i}\right\| = 1$ cm ; on donne $\vec{u}_1 = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{u}_2 = 2\vec{i} + \vec{j}$ et le point M_0 tel que $\overrightarrow{OM_0} = 3\vec{i}$.

a) Construire géométriquement quelques points de l'hyperbole (H) contenant le point M_0 et ayant pour asymptotes les droites $\left(O, \vec{u}_1\right)$ et $\left(O, \vec{u}_2\right)$.

b) A l'aide du Préliminaire, en expliquant votre démarche, construire un sommet de (H) puis les foyers de (H). Tracer (H).

4) Soit ϕ une application affine bijective. Montrer à l'aide des résultats précédents que ϕ(H) est une hyperbole.

5) Soit ϕ une application affine bijective associée à une application linéaire de matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

Montrer analytiquement que l'image par ϕ du cercle de centre O de rayon R est une conique dont on précisera la nature.

PARTIE II

Soient a, b, c, d quatre réels tels que $ad-bc=1$. On considère la matrice $T=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

On étudie les suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $X_n=(x_n,y_n)$, d'éléments de $\mathbb{R}^2$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}\ ,\ \text{avec } (x_0,y_0)\neq(0,0).$$

On notera M_n le point de coordonnées $(x_n\ ,\ y_n)$ dans le plan (P) rapporté au repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Déterminer le polynôme caractéristique de T. Discuter selon la valeur de $a+d$ la nature de ses racines.

2) On suppose $a+d=2$ et T distincte de l'identité. Montrer que, dans le cas général, les points M_n sont situés sur une droite dont on précisera la direction. Les suites (x_n) et (y_n) sont-elles bornées ? Discuter.

3) On suppose $a+d=-2$ et T distincte de –Id. Montrer que les points M_n appartiennent à la réunion de deux droites parallèles (éventuellement confondues) dont on précisera la direction. Les suites (x_n) et (y_n) sont-elles bornées ? Discuter.

4) On suppose $|a+d|>2$.

a) Montrer que T est diagonalisable.

b) Soit P une matrice telle que $T=PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale.
On pose $Y_n=P^{-1}X_n$.
A quel ensemble appartiennent les points de coordonnées Y_n ?

c) En déduire que les points M_n appartiennent à un même ensemble constitué de la réunion d'une hyperbole et de ses asymptotes.

d) Les suites (x_n) et (y_n) sont-elles bornées ? Discuter.

e) Application : on suppose que $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=d=1$, $x_0=3$ et $y_0=0$.

Montrer que les points M_n appartiennent à l'hyperbole (H) construite au **I - 3)**

5) On suppose $|a+d|<2$.

a) Montrer que T est semblable à une matrice de rotation.

b) Montrer que les points M_n appartiennent à une même conique dont on précisera la nature.

c) Les suites (x_n) et (y_n) sont-elles bornées ? Discuter.

PARTIE III

Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue non identiquement nulle de période 1. On étudie l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad y''(t) + p(t)y(t) = 0$$

On note Φ_1 et Φ_2 les solutions de (E) définies par :

$$\Phi_1(0)=1,\ \Phi_1'(0)=0 \quad \text{et} \quad \Phi_2(0)=0,\ \Phi_2'(0)=1.$$

On suppose que l'intervalle de définition de Φ_1 et Φ_2 contient l'intervalle [0, 1]. Soit F la matrice définie par :

$$F=\begin{pmatrix} \Phi_1(1) & \Phi_2(1) \\ \Phi_1'(1) & \Phi_2'(1) \end{pmatrix}$$

1) Soient α et β des réels donnés et y la solution de (E) vérifiant $y(0) = \alpha$ et $y'(0) = \beta$.

a) Exprimer y en fonction de Φ_1 et Φ_2.

b) Soit z la solution de (E) vérifiant $z(1) = \alpha$ et $z'(1) = \beta$.

Montrer que $\forall t \geq 0$, $z(1+t)=y(t)$.

2) En utilisant le Wronskien de Φ_1 et Φ_2 montrer que det(F) = 1.

3) On suppose qu'il existe un réel non nul λ et une solution u de (E) telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \ u(t+1) = \lambda u(t) .$$

a) Que peut-on dire du réel λ vis-à-vis de la matrice F ?

b) Enoncer et justifier soigneusement une réciproque.

c) Existe-t-il des solutions non bornées de (E) sur $\mathbb{R}$?

d) On suppose en outre que $\int_0^1 p(t)dt \geq 0$. Montrer que toute solution de (E) s'annule au moins une fois sur [0, 1]. (On pourra raisonner par l'absurde et diviser l'équation par u.)

4) On abandonne les hypothèses de la question **3)**. Montrer que si $\left|\Phi_1(1)+\Phi_2'(1)\right| < 2$, alors toutes les solutions de (E) sont bornées sur $\mathbb{R}$.

5)

a) Soit f une fonction continue définie sur un intervalle $[a, b]$, strictement positive et deux fois dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b) = 0$.

On suppose que l'intégrale $J = \int_a^b \frac{|f''(t)|}{f(t)} dt$ existe (c'est-à-dire est convergente).

Montrer que $(b-a)J > 4$.

Indication : on montrera que pour tout réel $c \in]a, b[$ on a

$$\frac{4}{b-a} \leq \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{1}{f(c)}\left(\frac{f(c)-f(a)}{c-a} - \frac{f(b)-f(c)}{b-c}\right) ,$$

puis on choisira c convenablement.

b) En déduire que si p est positive et vérifie $\int_0^1 p(t)dt \leq 4$, toutes les solutions de (E) sont bornées.